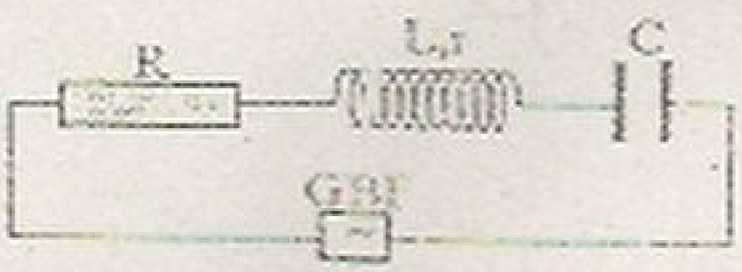
Révision

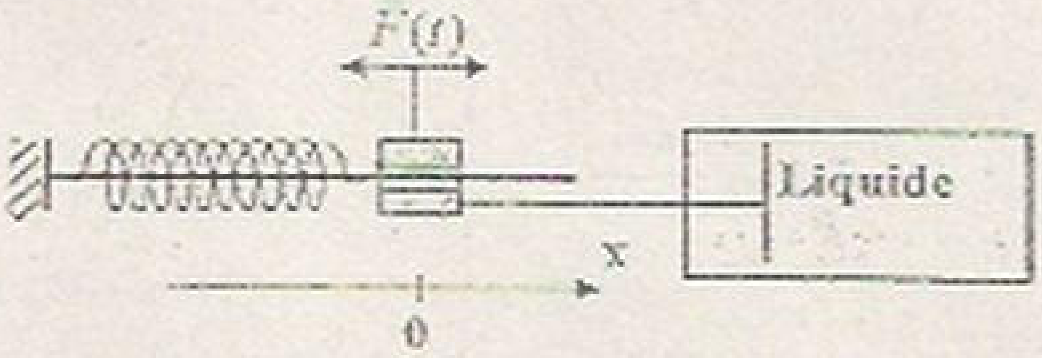
4ème Math et Sc.exp

OSCILLATIONS MECANIQUES FORCEES

Profs : Abdelmoula et Zribi

On considère les deux dispositifs suivants :





* Dispositif 1 : circuit électrique comportant en série :

-) un générateur basse fréquence (GBF) délivrant une tension sinusoïdale $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_U)$

-) une bobine d'inductance L et de résistance r

-) un résistor de résistance R

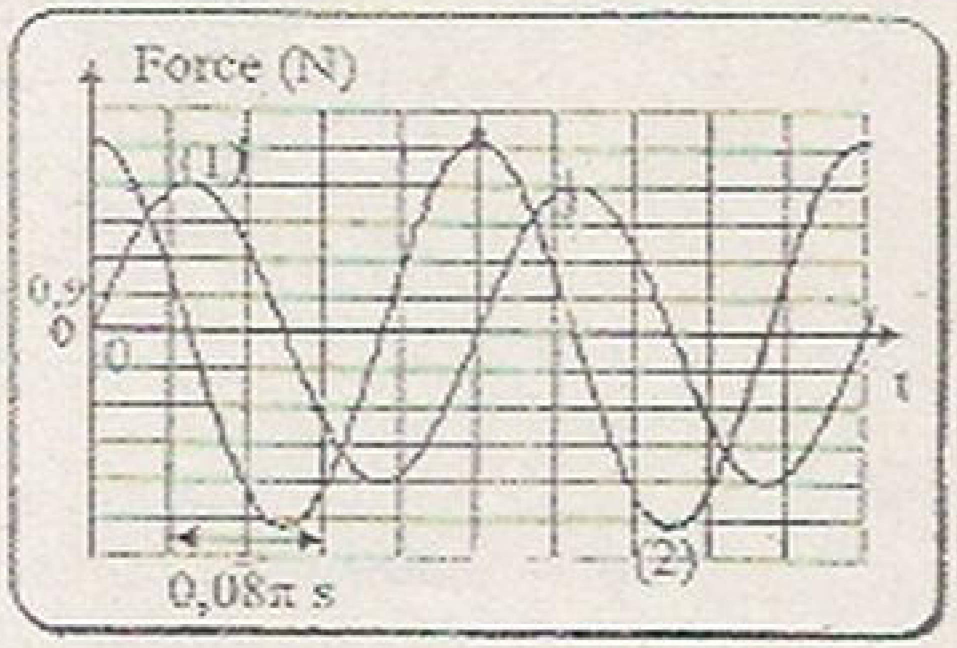
-) un condensateur de capacité C.

* Dispositif 2 : pendule élastique formé par un ressort horizontal à spires non jointives, de constante de raideur K auquel est accroché un solide (S) de masse m. L'ensemble est soumis à des forces de frottement du type visqueux dont la résultante est $\vec{f} = -h\vec{V}$ ($h = 2{,}4\sqrt{2}\ kg.s^{-1}$) et excité par une force de direction horizontale et dont la valeur varie sinusoïdalement au cours du temps $F(t) = F_m \sin(\omega t + \varphi_F)$.

1) a) Établir l'équation différentielle régissant les oscillations dans le circuit et reliant l'intensité i du courant, sa dérivée et sa primitive.

b) En utilisant l'analogie électrique mécanique déduire l'équation différentielle régissant les oscillations dans le pendule élastique et reliant la vitesse V du solide (S), sa dérivée et sa primitive. Donner sa solution.

2) Pour une valeur ω_1 de ω, un dispositif approprié nous a permis de tracer la courbe d'évolution de la force excitatrice F et celle de la tension T du ressort.



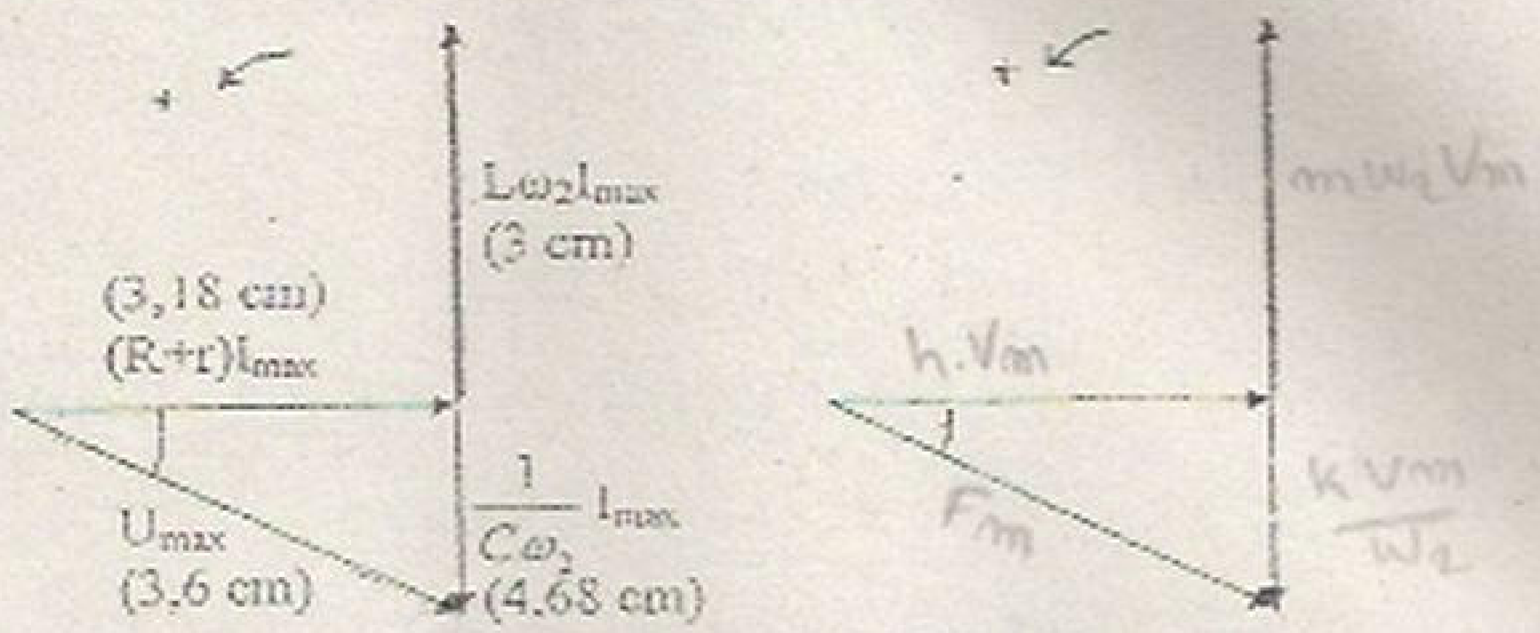
a) Montrer que la courbe (1) correspond à F(t).

b) Ecrire l'expression de F en fonction du temps.

c) Montrer que l'oscillateur est en résonance de vitesse.

d) Déduire la valeur de la pulsation propre ω_0 du résonateur.

3) Pour une valeur ω_2 de ω, on donne le diagramme de Fresnel à l'échelle et relatif aux tensions maximales et son correspondant par analogie électrique mécanique :

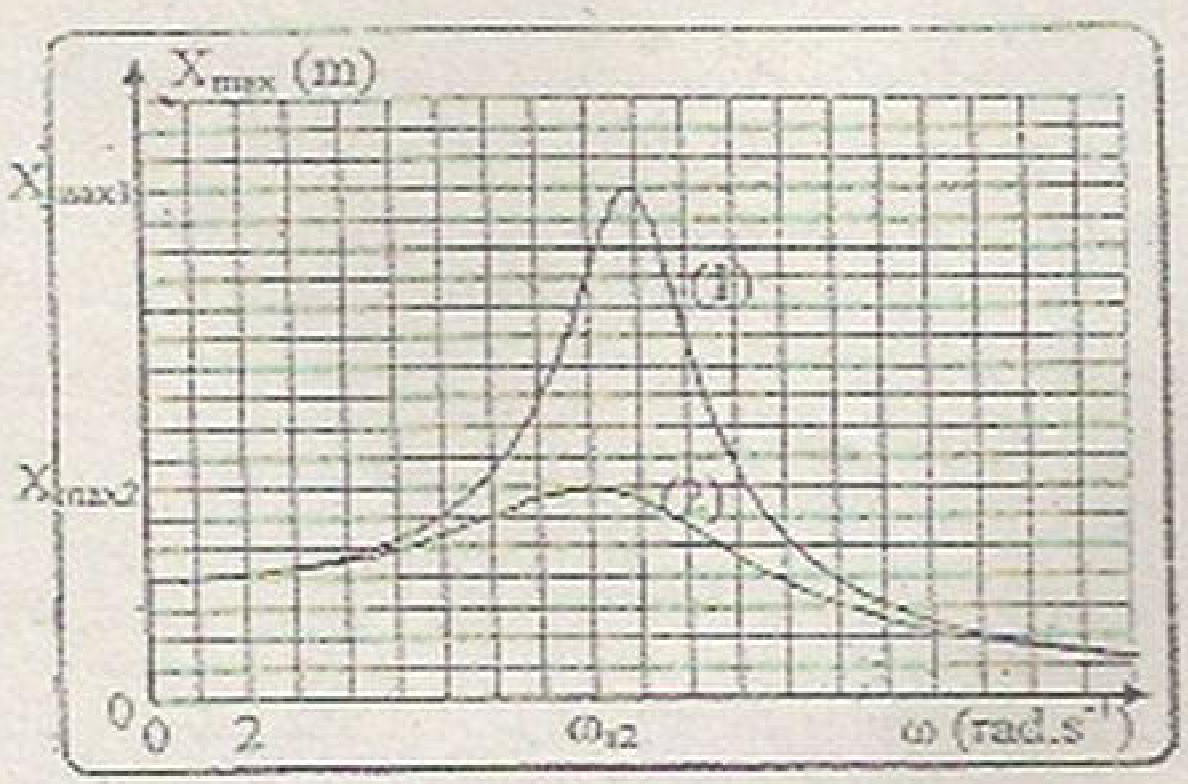


a) En utilisant l'analogie électrique mécanique légender le diagramme de Fresnel relatif aux forces maximales.

b) Déduire de ce diagramme les valeurs de V_m (amplitude de la vitesse), la masse m du solide, la constante de raideur K du ressort, le déphasage $(\varphi_F - \varphi_V)$ et la pulsation ω_2.

c) Vérifier que l'oscillateur est en résonance d'élongation.

4) Une étude expérimentale nous a permis de tracer les courbes (1) et (2) d'évolution de l'amplitude X_m de l'élongation x en fonction de la pulsation ω de l'excitateur, pour deux valeurs respectivement h_1 et h_2 du coefficient de frottement h.



a) Déterminer la valeur de X_{1m} et celle de X_{2m}.

b) Quel est le phénomène réalisé pour X_{1m} et pour X_{2m} ?

c) Déterminer graphiquement la valeur de ω_{2r} et déduire la valeur de h_2.

d) Représenter sur le graphe précédent, en faisant le calcul nécessaire, l'allure de la courbe d'évolution de X_m en fonction de ω pour $h = h_3 = 3{,}4\sqrt{3}$ kg.s^{-1}.

Prof : Kdhir A

Série N°13

Evolution de systèmes

LYCEE MEDENINE

Oscillations mécaniques forcées en régime sinusoïdal

4ème Sc, M et T

Exercice 1

1)Définir les oscillations forcées.

2)Existe-il des valeurs de la fréquence excitatrice N pour les quelles le déphasage entre F(t) et x(t) change de signe ?

3)Etablir l'expression de l'amplitude X_m des oscillations en fonction de la fréquence N.

4)Etablir l'expression de $tg(\varphi_x - \varphi_F)$ en fonction de la fréquence N.

5)La fréquence N_r pour laquelle il y a résonance d'amplitude est-elle :
supérieure, inférieure ou égale à la fréquence propre N_0 de l'oscillateur ?

6)Etablir l'expression de la fréquence N_r à la résonance d'élongation en fonction de la fréquence propre N_0, le coefficient de frottement h et la masse m du solide.

7)Lorsque l'amortissement augmente, la fréquence de résonance d'amplitude : augmente, ne varie pas ou diminue.

8)Dans le cas où l'amortissement est nul :

- Préciser le déphasage de x(t) par rapport à F(t).
- Etablir l'expression de X_m en fonction de F_m, m, N et N_0.

9)Tracer approximativement les courbes $X_m = f(N)$ pour différentes valeurs du coefficient de frottement h.

10)Montrer que la résonance d'élongation n'est possible que pour des valeurs de h inférieures à une valeur limite h_0 que l'on precisera.

11)Etablir, par deux méthodes, l'expression de la vitesse maximale V_m en fonction N.

12)Préciser l'expression et l'unité de l'impédance mécanique.

13)La résonance de vitesse s'obtient lorsque : $N > N_0$, $N < N_0$ ou pour $N = N_0$.

14)A la résonance de vitesse : • comparer la phase de F(t) et v(t).
• Ecrire l'expression de l'amplitude V_m de la vitesse v(t).

15)Lorsque l'amortissement augmente, la fréquence de résonance de vitesse : augmente, diminue ou reste invariable ?

16)Quelle est l'expression de la puissance mécanique moyenne ?

17)A la résonance de puissance a-t-on résonance d'élongation ou résonance de vitesse ?

18)Etablir par analogie mécanique-électrique, l'expression de la charge maximale Q_m des oscillations et $tg(\varphi_q - \varphi_u)$ en fonction de la fréquence excitatrice N.

19)Etablir l'expression de la fréquence N_r à la résonance de charge en fonction de la fréquence propre N_0, la résistance totale du circuit (R + r) et l'inductance L de la bobine .

20)Tracer l'allure des courbes $Q_m = f(N)$ pour différentes valeurs de la résistance totale du circuit.

Exercice 2

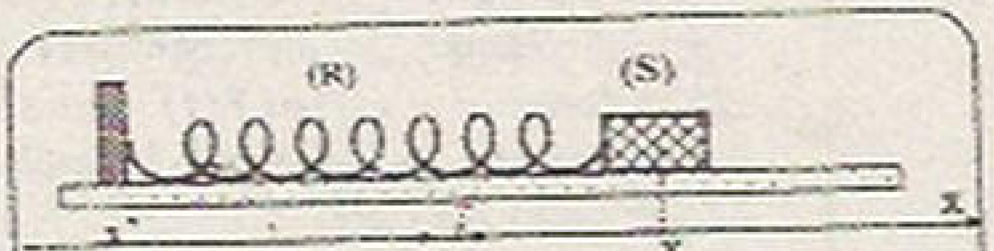
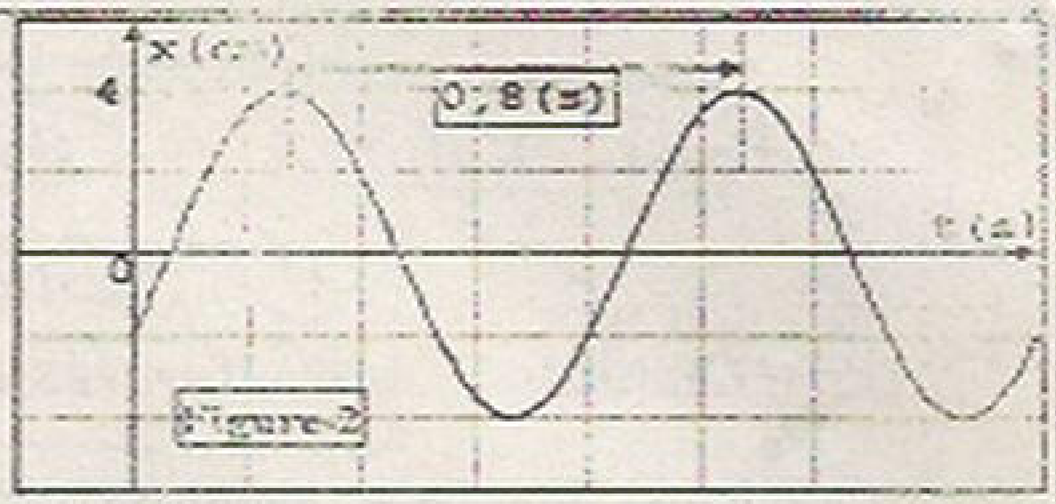


Figure-1

Un solide (S) de masse m, est attaché à l'une des ses extrémités d'un ressort à spires non jointives, de raideur K et de masse négligeable. L'autre extrémité du ressort est fixe. Le mouvement du centre d'inertie G du solide, est étudié dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. La position de G est repérée par son abscisse x dans le repère R(O, $\vec{i}$). O coïncide avec la position d'équilibre de G et $\vec{i}$ un vecteur unitaire.(Figure-1). Au cours de son mouvement, le solide est soumis à des frottements visqueux équivalents à une force $\vec{f} = -h\vec{v}$, où h est une constante positive et $\vec{v}$ le vecteur vitesse de G. A l'aide d'un dispositif approprié, on applique sur le solide (S) une force excitatrice: $\vec{F}(t) = F_m \sin(2\pi N t)\vec{i}$ d'amplitude F_m constante et de fréquence N réglable. L'élongation du centre d'inertie de

51

G est de la forme : $x(t) = X_m \sin(2\pi N t + \varphi_x)$.



Expérience 1 :

On fixe la fréquence N à la valeur N_1.

L'élongation x(t) est donnée par la courbe de la figure-2.

1)a-Déterminer l'amplitude X_m et la fréquence N_1.

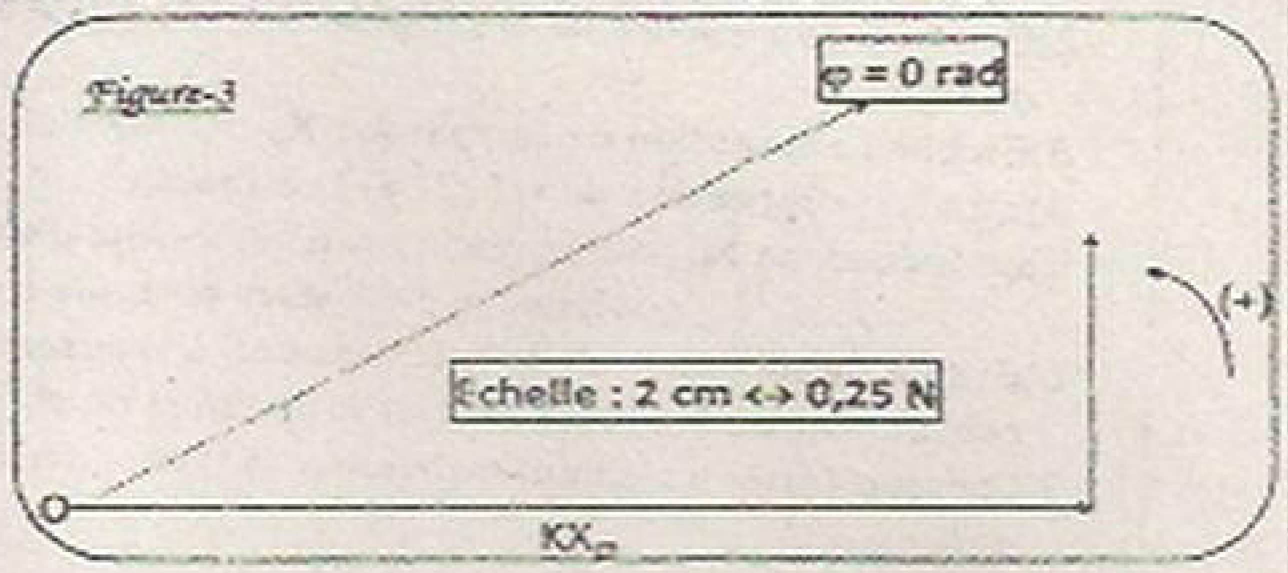
b-Montrer que le déphasage de x(t) par rapport à F(t) est : $\varphi_x - \varphi_F = -\frac{\pi}{6}$ rad.

2)a-Etablir l'équation différentielle régissant les oscillations du centre d'inertie G du solide (S).

b-Compléter selon l'échelle indiquée, la construction de Fresnel de la figure-3.

c-En exploitant la représentation de Fresnel précédente, déterminer les valeurs de K, h, m et F_m.

Expérience 2 :



On varie la fréquence excitatrice N et pour deux valeurs différentes du coefficient de frottement h tel que $h_1 < h_2$, on détermine l'amplitude X_m, ce qui permet de tracer les courbes $X_m = f(N)$ de la figure-4

1)a-Expliquer qualitativement comment évolue X_m lorsque N augmente.

b-Quel est alors le phénomène mis en évidence par cette expérience ?

c-Attribuer en justifiant, à chaque courbe le coefficient de frottement correspondant.

2) Sachant que $Nr_1 = 1,8$ Hz, calculer l'amplitude a_1.

3)A l'aide d'une analogie électrique - mécanique :

a-Etablir l'expression de l'amplitude V_m de la vitesse v(t) en fonction de F_m, h, m ,K et N.

b-Pour $h = 0,8\ kg.s^{-1}$ et lorsque $N = N_o$, avec N_o est la fréquence propre de l'oscillateur :

- Déterminer X_m, V_m, φ_v et φ_x.
- Calculer la puissance moyenne consommée par l'oscillateur.

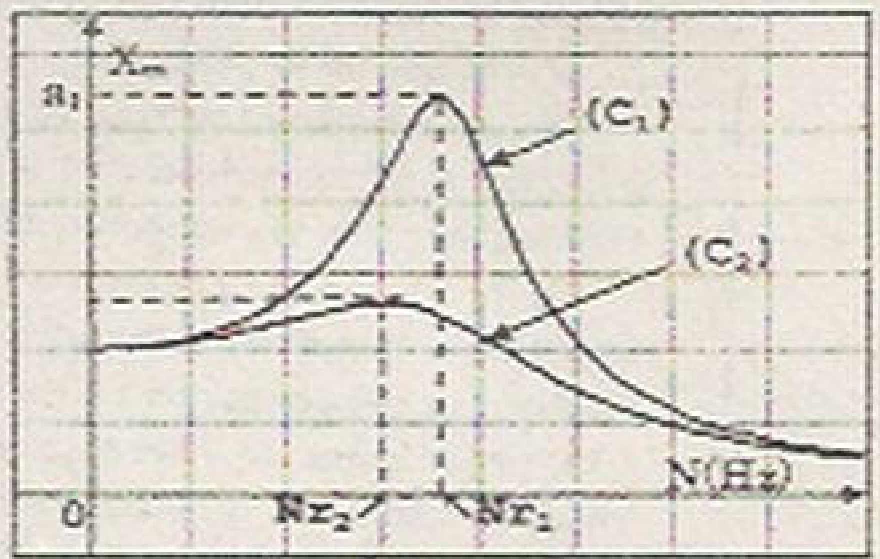
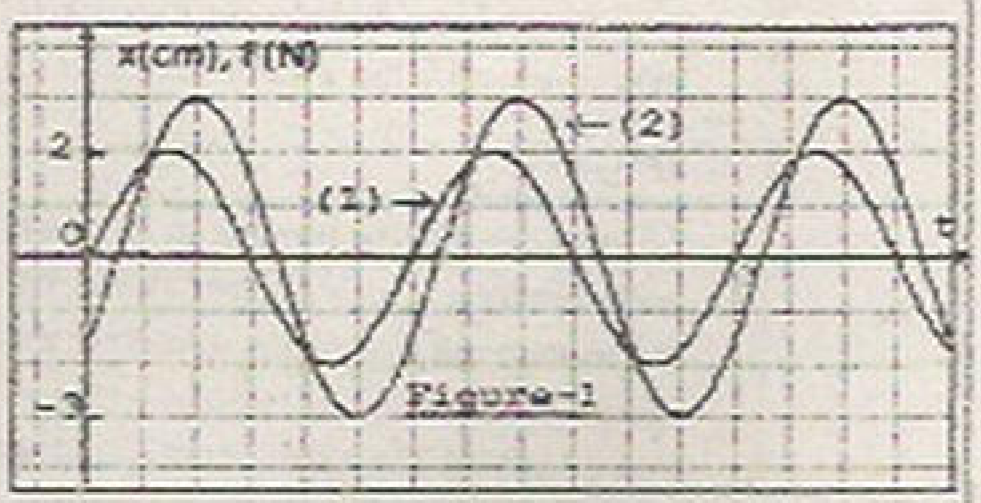


Figure-4

Exercice 3

Un oscillateur mécanique est formé d'un ressort à spires non jointives, de masse négligeable et de constante de raideur K, relié à un solide de masse m = 50 g, l'ensemble est placé sur un plan horizontal. Au cours de son mouvement, le solide est soumis à une force excitatrice $\vec{F}(t) = F_m \sin(70t + \varphi_F)\vec{i}$ et une force de frottement visqueux $\vec{f} = -h\vec{v}$. L'élongation x(t) du solide est de la forme $x(t) = X_m \sin(70t + \varphi_x)$. On considère le repère $R(O, \vec{i})$ tel que le point O coïncide avec la position d'équilibre du solide.



1)Au cours des oscillations, il y a transfert d'énergie entre l'excitateur et le résonateur.

Préciser dans quel sens s'effectue ce transfert et pourquoi ?

2)Etablir l'équation différentielle des oscillations en x(t).

3)Les fonctions x(t) et F(t) sont données par la figure -1.

a-Préciser , en justifiant, laquelle des courbes (1) et (2) représente x(t).

b-Déterminer les expressions de x(t) et de F(t).

c-A l'aide de la construction de Fresnel, déterminer la valeur de h et de K.

4)a-Rappeler l'expression de l'amplitude X_m des oscillations en fonction de la pulsation excitatrice ω.

b-Montrer que la résonance d'amplitude s'obtient pour $\omega_r^2 = \omega_o^2 - \frac{h^2}{2m^2}$

c-Préciser l'expression de x(t) et de la vitesse v(t) du solide pour $\omega = \omega_r$

5)a-Montrer que la résonance de vitesse s'obtient pour $\omega = \omega_o$.

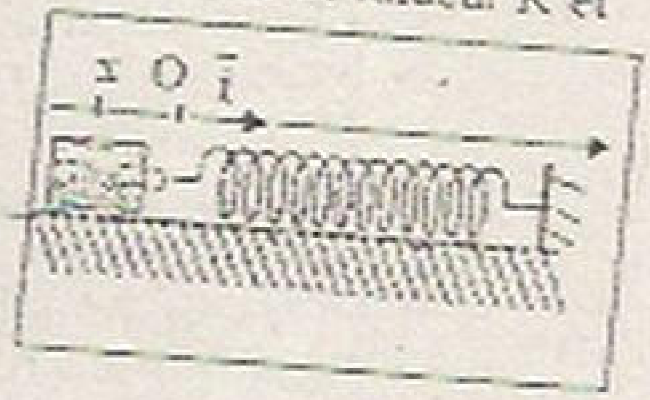
b- Déterminer à la résonance de vitesse de x(t) v(t) F(t) et f(t) .

LYCEE PILOTE SFAX .	SERIE N° 11: OSCILLATEUR MECANIQUE FORCE	

1g

Exercice N° 1:

Un pendule élastique horizontal est constitué d'un ressort à spires non jointives, de constante de raideur K et d'un solide (S) de masse m = 0,25 Kg de centre d'inertie G. A l'équilibre G occupe la position O, origine du repère $(O,\vec{i})$. Le solide est soumis à une force excitatrice $\vec{F} = F_m \sin(\omega t + \varphi_F).\vec{i}$. Au cours de son mouvement il est soumis à une force de frottement de la forme $\vec{f} = -h\vec{v}$.



1) Etablir l'équation différentielle vérifiée par l'élongation x(t) de G .

2) Cette équation admet comme solution $x(t) = x_m \sin(\omega t + \varphi_x)$.

a- Faire la représentation de Fresnel pour $\omega > \omega_0$.

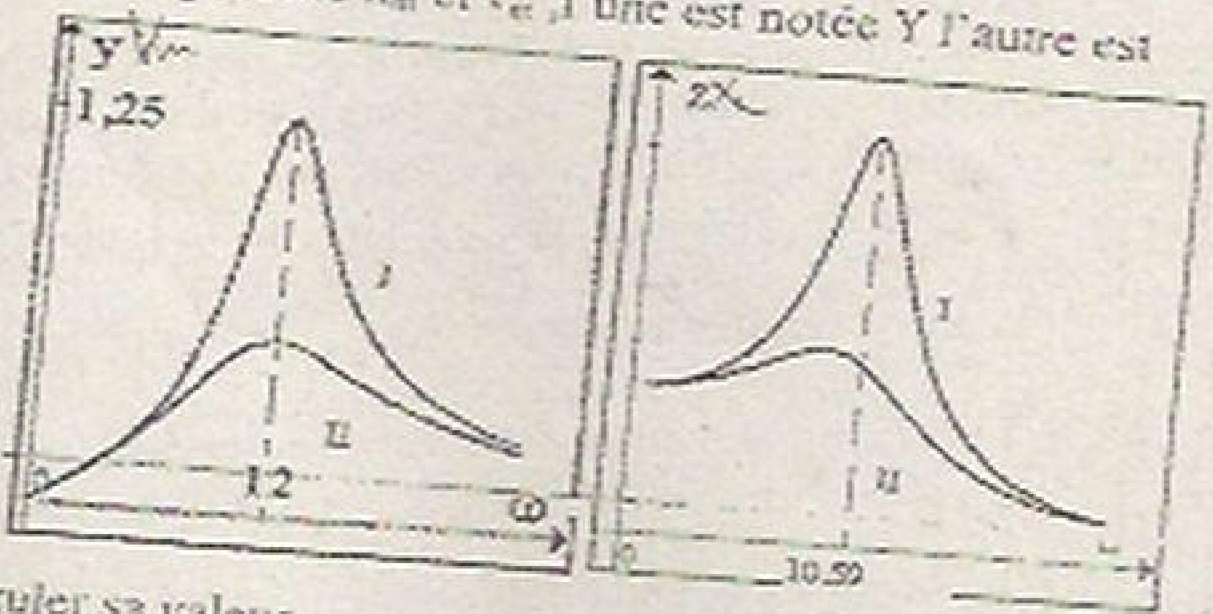
b- Déduire l'expression de x_m puis déterminer l'expression de la pulsation de résonance d'élongation.

c- A quelle condition obtient-on résonance de vitesse.

3) On étudie séparément les variation, en fonction de ω , des amplitudes x_m et v_m ,l'une est notée Y l'autre est Z : l'étude est effectuée pour deux valeurs de h, on obtient dans chaque cas les courbes I et II.

a- Identifier en le justifiant l'amplitude notée Y et celle notée Z.

b- On s'intéresse aux courbes I. Déterminer les valeurs de K, h et Fm.



4) Pour une valeur ω_1 de la pulsation, on obtient $\varphi_v - \varphi_x = \frac{\pi}{3}$ rad .

a- Calculer ω_1 et x_m puis déduire v_m.

b- Donner l expression de l'impédance mécanique et calculer sa valeur.

c- Exprimer la puissance mécanique moyenne en fonction de h , Fm et Z.

Exercice N°2 :

Un pendule élastique horizontal est constitué par un ressort à spires non jointive de masse négligeable et de raideur **k= 90 N.m⁻¹** et d'un solide (S) de masse **m = 0,1Kg** accroché à l'extrémité libre du ressort dont l'autre extrémité est liée à un point fixe .(Voir figure)

A) Le solide (S) peut osciller sur le plan horizontal. Il alors soumis à une force de frottement visqueux $\vec{f} = -hv.\vec{i}$ avec h : le coefficient de frottement et $\vec{v}$: vitesse instantanée du centre d'inertie du solide (S).

1) On écarte le solide (S) de sa position d'équilibre de X_0 dans le sens négatif et on le libère à la date t = 0 sans vitesse initiale. Etablir l'équation différentielle du mouvement du centre d'inertie du solide (S) repéré par son abscisse x dans le repère $(O;\vec{i})$ avec O : la position d'équilibre du centre d'inertie de (S).

2) a- Donner l'expression de l'énergie mécanique E du système (Terre, solide ressort).

b- Montrer que l'énergie mécanique totale de ce système diminue au cours du temps. Quelle est la cause de cette diminution ?

3) Tracer l'allure de la courbe de la variation de x en fonction du temps. Envisager les deux cas possibles. (Amortissement faible, amortissement important). Donner le nom de chaque régime.

B) Pour entretenir les oscillations de (S), on l'excite à l'aide d'une force sinusoïdale de pulsation ω réglable variable tel que $\vec{F} = F(t).\vec{i} = F_m \sin(\omega t + \varphi_F).\vec{i}$ avec $F_m = 4,5$ N et $\varphi_F = \frac{\pi}{2}$ rad .

1) Etablir l'équation différentielle du mouvement de (S) en fonction de v ; $\frac{dv}{dt}$; $\int v dt$ et F.

2) Sachant que la solution de cette équation différentielle est $v(t) = V_m \sin(\omega t + \varphi_v)$.

a- Construire le diagramme de Fresnel correspondant à ω = 20 rad. s⁻¹

b- Déduire les expressions de V_m et $tg(\varphi_F - \varphi_v)$. Donner alors l'expression de v (t) sachant que pour $h = h_1 = \sqrt{2,75}$ $Kg.s^{-1}$.

c- En déduire l'expression de x (t).

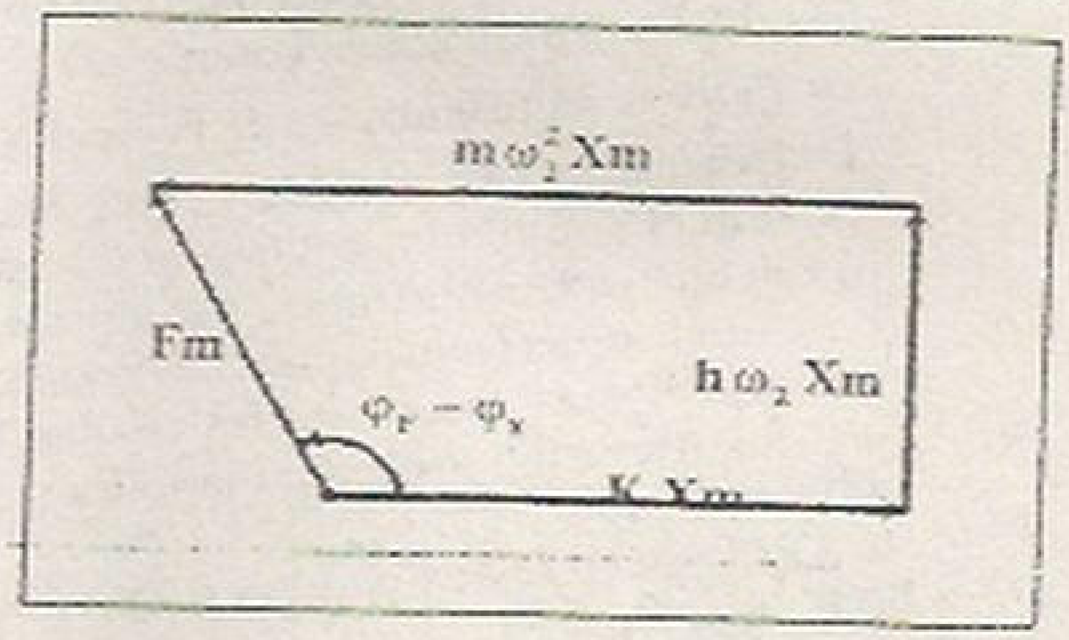
3) On fait varier ω .Pour une certaine valeur ω_1, de la pulsation, V_m est maximale.

a- Déterminer les valeurs de ω_1 et V_m.

b- Donner l'allure de la courbe de variation de V_m en fonction de ω.

c- Montrer que l'énergie reste constante pour la pulsation ω_1. Calculer la valeur de E.

4) On considère un nouveau milieu visqueux de coefficient d'amortissement h_2. On fait varier ω, on obtient pour une valeur ω_2 le diagramme de Fresnel suivant.



a- Déterminer l'échelle relative à ce diagramme sachant que F_m reste constante.

b- Déterminer Xm ; ω_2 et h_2.

c- Déduire les expressions de x(t) et v(t).

Exercice N°3:

On considère un oscillateur mécanique constitué d'un ressort de constante de raideur K et d'une masse m (Voir figure 3-). L'oscillateur excité par une force $\vec{F} = F_m \sin(\omega t + \varphi_F)\vec{i}$, subit des frottements visqueux donc la force résultante est $\vec{f} = -h\vec{v}$. On donne les courbes F (t) et T (t) (Voir figure 4).

1) Ecrire l'équation différentielle vérifiée par la variable x.

2) a- Montrer que la courbe (I) correspond à T (t)

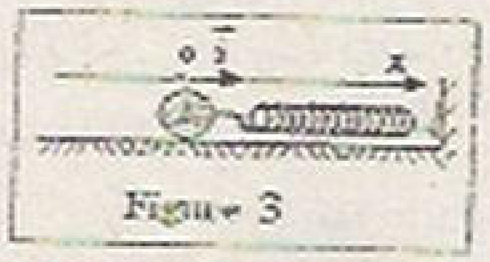


Figure 3

b- Montrer que le déphasage $\varphi_F - \varphi_x = \frac{5\pi}{6}$ rad

c- Exprimer F (t) et T (t) .

d- On donne $X_{max} = 4$ cm .Calculer K

3) a- Faire la représentation de Fresnel correspondante à ce cas. (on respectera le déphasage trouvé) .

b- Déduire les valeurs de : h et m .

4) On fait varier la pulsation de l'excitateur jusqu'à atteindre la valeur $\omega_1 = 4\sqrt{10}$ $rad.s^{-1}$

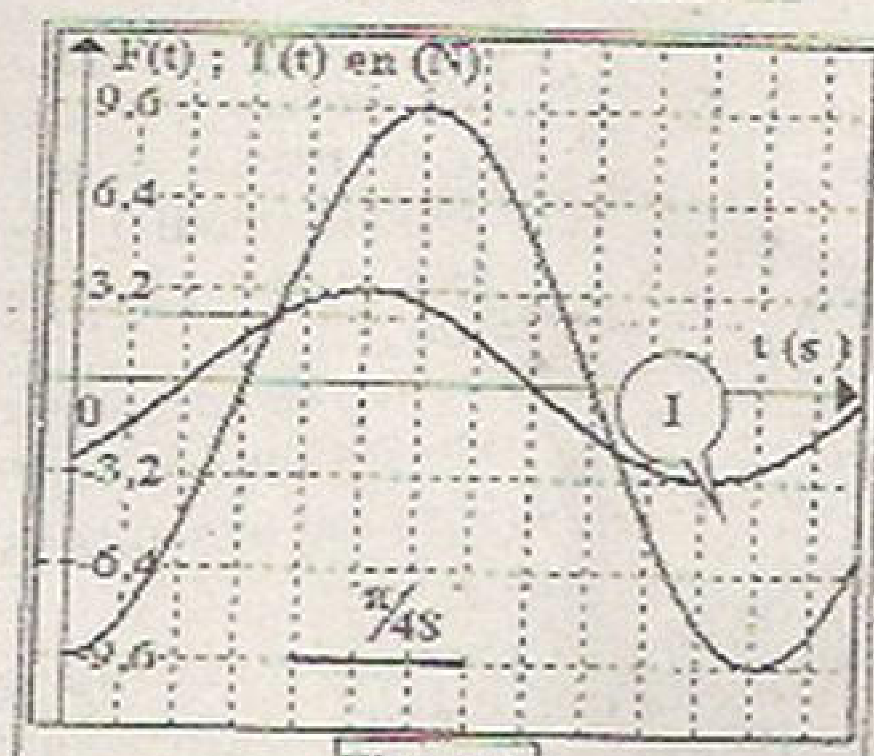


Figure4

a- Déterminer pour cette pulsation x(t) et v(t).

b- Calculer la puissance moyenne dissipée par l'oscillateur.

5) a- Donner l'expression de la pulsation à la résonance d'élongation, calculer sa valeur ω_2 .

b- Déterminer pour la pulsation ω_2 les valeurs de X_{max} et V_{max}. Comparer ces valeurs à celles trouvées pour la pulsation ω_1 puis donner une explication à ces résultats.

6) En utilisant l'analogie mécanique-électrique donner les expressions de Qm et ω_2 la pulsation de résonance de charge.

Exercice N° 4 : Un pendule élastique horizontal formé d'un ressort de raideur K et un solide (s) de masse m est soumis à une force de frottement visqueux de la forme $\vec{f} = -h.\vec{v}$ et à une force excitatrice $\vec{F}$ de la forme $F(t) = 2\sin(\omega t + \varphi_F)$;lorsque le ressort n'est pas déformé le centre d'inertie du solide (s) se trouve à l'origine du repère $\Re(O;\vec{i})$.Deux groupes d'élèves ont voulu déterminer les grandeurs (K et m) du pendule élastique ainsi que la valeur du coefficient de frottement h (h>0 qui caractérise le milieu visqueux).

I) Le 1er groupe étudie les variations de la force excitatrice F et de l'abscisse x occupée par le solide en fonction du temps pour une valeur de $\omega = \omega_1$ de l'excitateur. Ce qui permet de tracer les courbes de la figure-1- :